Příklad 11 - Mimostředný tah a tlak, jádro průřezu

<u>*Teorie*</u>

Při mimostředném tahu a tlaku je průřez namáhám normálovou silou N a ohybovými momenty My a Mz. Jiným vyjádřením stejného problému je normálová síla, jejíž působiště je vůči těžišti umístěno na excentricitách e_z a e_y.

Kladná normálová síla na kladných excetricitách způsobuje momenty

$$M_y = N e_z$$
$$M_z = -N e_y$$

Normálové napětí je součtem napětí od jednotlivých vnitřních sil

$$s_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z}$$

Po dosazení za momenty dostaneme

$$s_x = \frac{N}{A} + \frac{N e_z z}{I_y} - \frac{N e_y y}{I_z}$$

$$s_x = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{A e_z z}{I_y} - \frac{A e_y y}{I_z}\right)$$

využitím vztahu pro poloměr setrvačnosti $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ dostaneme

$$s_x = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{e_z z}{i_y^2} - \frac{e_y y}{i_z^2}\right)$$

Pro rovnici neutrální osy platí $s_x = 0$. Musí tedy být roven nule výraz v závorce.
Rovnice neutrální osy v průřezu je následující rovnice přímky

$$1 + \frac{e_z z}{i_y^2} - \frac{e_y y}{i_z^2} = 0$$

Její průsečík s osou y získáme, dosadíme-li za z-ovou souřadnici nulu.

$$y_N = -\frac{i_z^2}{e_y}$$

Obdobným způsobem získáme průsečík s osou z

$$z_N = -\frac{i_y^2}{e_z}$$

Úlohu můžeme také obrátit, tzn., že k neutrální ose dané průsečíky se souřadnými osami, hledáme působiště normálové síly

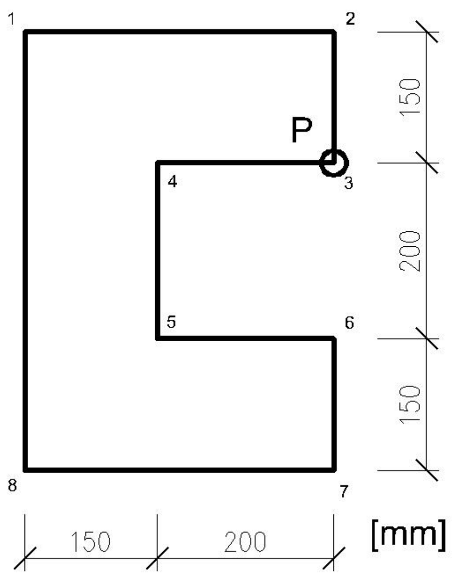
$$e_y = -\frac{i_z^2}{y_N} \qquad e_z = -\frac{i_y^2}{z_N}$$

Neutrální osa rozděluje průřez na tlačenou a taženou část. Pokud jde neutrální osa mimo průřez, celý průřez je tažený nebo tlačený. Mezním stavem mezi těmito dvěma případy je neutrální osa dotýkající se průřezu. Pokud budeme klást neutrální osu do hran průřezu, tak aby neprocházela průřezem, působiště odpovídající těmto neutrálním osám vymezí tzv. jádro průřezu. Úsečka spojující získané body odpovídají otáčení neutrální osy kolem jádra průřezu. Pokud by normálová síla působila uvnitř jádra průřezu, celý průřez by byl tlačen nebo tažen.
Body ohraničující jádro průřezu jsou excentricity působiště síly pro jednotlivé hraniční polohy neutrální osy:

$$y_j = -\frac{i_z^2}{y_{N\,j}} \qquad z_j = -\frac{i_y^2}{z_{N\,j}}$$

Pokud je ve jmenovateli ∞ , tzn. neutrální osa je rovnoběžná se souřadnou osou, pak příslušná souřadnice jádra je rovna nule.

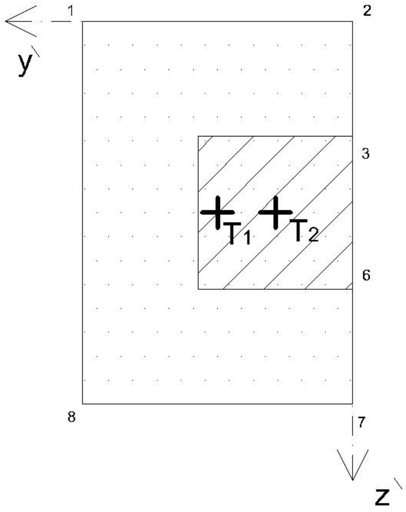
příklad
Pro průřez na obrázku
1) nakreslete jádro průřezu
2) pro tahovou sílu N=200 kN působící v bodě P
    a) vykreslete průběh napětí po obvodu průřezu
    b) určete rovnici neutrální osy, zakreslete její polohu a zakótujte



řešení

K řešení budeme potřebovat některé průřezové charakteristiky.
Těžiště průřezu
Vzhledem k symetrii průřezu, leží *z*-ová souřadnice těžiště uprostřed výšky průřezu.

Pro výpočet y-ové souřadnice můžeme průřez uvažovat jako rozdíl dvou obdélníků



$$y'_T = \frac{A_1 y_1 - A_2 y_2}{A_1 - A_2} = \frac{0{,}35.0{,}5.0{,}175 - 0{,}2.0{,}2.0{,}1}{0{,}35.0{,}5 - 0{,}2.0{,}2} = 0{,}0197222m$$

průřezová plocha

$$A = A_1 - A_2 = 0{,}35.0{,}5 - 0{,}2.0{,}2 = 0{,}135m^2$$

momenty setrvačnosti

$$I_y = \frac{1}{12}\left(0{,}35.0{,}5^3 - 0{,}2^4\right) = 3512{,}5.10^{-6}\,m^4$$

$$I_z = \frac{1}{12}\left(0{,}5.0{,}35^3 - 0{,}2^4\right) + 0{,}35.0{,}5.0{,}02222^2 - 0{,}2^2.0{,}09722^2 = 1361{,}46.10^{-6}\,m^4$$

poloměry setrvačnosti

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{3512{,}5.10^{-6}}{0{,}135} = 0{,}026018m$$

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{1361{,}46.10^{-6}}{0{,}135} = 0{,}010085m$$

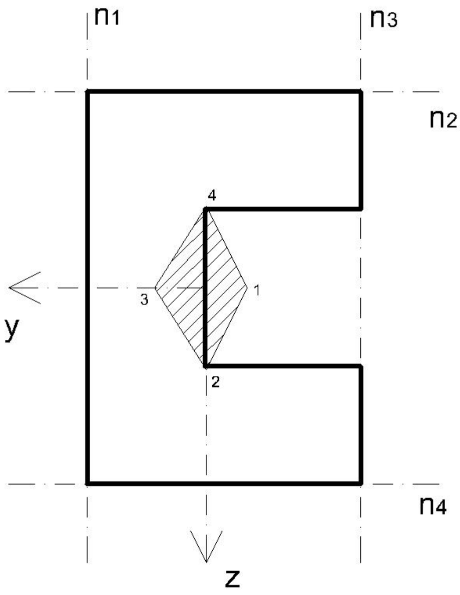
ad 1) Jádro průřezu

$$y_1 = -\frac{i_z^2}{y_{N1}} = -\frac{0{,}010085}{0{,}15278} = -0{,}066m \qquad z_1 = -\frac{i_y^2}{z_{N1}} = -\frac{0{,}026018}{\infty} = 0m$$

$$y_2 = -\frac{i_z^2}{y_{N2}} = -\frac{0{,}010085}{\infty} = 0m \qquad z_2 = -\frac{i_y^2}{z_{N1}} = -\frac{0{,}026018}{-0{,}25} = 0{,}104m$$

$$y_3 = -\frac{i_z^2}{y_{N3}} = -\frac{0{,}010085}{-0{,}19722} = 0{,}05113m \qquad z_3 = -\frac{i_y^2}{z_{N3}} = \frac{0{,}026018}{\infty} = 0$$

$$y_4 = -\frac{i_z^2}{y_{N4}} = -\frac{0{,}010085}{\infty} = 0m \qquad z_4 = -\frac{i_y^2}{z_{N4}} = -\frac{0{,}026018}{0{,}25} = -0{,}104m$$



ad 2a) Normálové napětí

$e_z = -0{,}1m$

$e_y = -y'_T = -0{,}0197222\,m$

$$s_x = \frac{N}{A}\left(1+\frac{e_z\,z}{i_y^2}+\frac{e_y\,y}{i_z^2}\right) = \frac{200.10^3}{0{,}135}\left(1+\frac{-0{,}1.z}{0{,}026018}+\frac{-0{,}197722.y}{0{,}010085}\right)$$

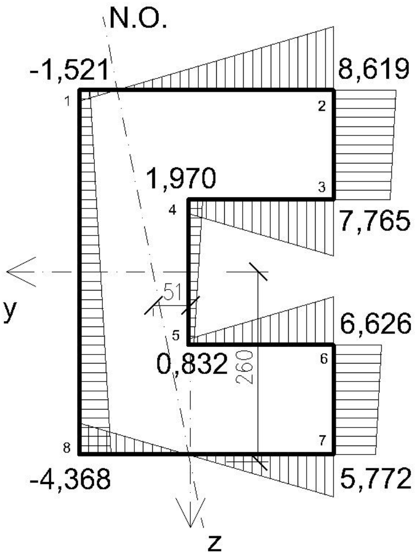
bod	y [m]	z [m]	σ [MPa]
1	0,15278	-0,25	-1,521
2	-0,19722	-0,25	8,619
3	-0,19722	-0,1	7,765
4	0,00278	-0,1	1,970
5	0,00278	0,1	0,832
6	-0,19722	0,1	6,626
7	-0,19722	0,25	5,772
8	0,15278	0,25	-4,368

$$1+\frac{e_z\,z}{i_y^2}+\frac{e_y\,y}{i_z^2} = \left(1+\frac{-0{,}1.z}{0{,}026018}+\frac{-0{,}197222.y}{0{,}010085}\right) = 0$$

$$1+3{,}846z-19{,}555y = 0$$

$$y_N = -\frac{i_z^2}{e_y} = \frac{0{,}010085}{-0{,}197222} = 0{,}0511m$$

$$y_N = -\frac{i_y^2}{e_z} = \frac{0{,}026018}{-0{,}1} = 0{,}26018m$$



N.O.
-1,521
8,619
1
2
1,970
3
4
7,765
y
51
5
6,626
0,832
6
260
8
7
-4,368
5,772
z