

Příklad 10 – Prostorový ohyb

Teorie

Definice

Šikmý nebo prostorový ohyb jsou způsobeny ohybovými momenty M_y a M_z působícími na průřez nosníku.

Až na výjimky jsou doprovázeny posouvajícími silami V_z a V_y .

Momenty M_y a posouvající síly V_z jsou způsobeny zatížením v rovině xz , kde x je osa prutu a z je totožná s jednou z hlavních os setrvačnosti průřezu – ne vždy se jedná o svislou osu.

Momenty M_z a posouvající síly V_y jsou způsobeny zatížením v rovině xy , kde osa z je totožná se zbývající z hlavních os setrvačnosti průřezu – ne vždy se jedná o vodorovnou osu.

Je-li poměr zatížení v rovinách xz a xy stejný po celé délce prutu, bude stejný poměr i mezi silami V_z a V_y a mezi M_y a M_z . V tomto případě je průhybová čára rovinnou křivkou a jedná se o šikmý ohyb. V opačném případě je průhybová čára prostorovou křivkou a jedná se o prostorový ohyb.

Výpočet napětí

Normálová napětí se získají jako součet napětí od působení jednotlivých momentů M_y a M_z .

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z}$$

kde

I_y, I_z ... momenty setrvačnosti průřezu

y, z ... souřadnice bodu v průřezu

M_y, M_z ... ohybové momenty

Neutrání osa

Neutrání osa je osa procházející průřezem, na které je normálové napětí $\sigma_x = 0$. Po dosazení $y = 0$ a $z = 0$ se dostane nulové normálové napětí. Neutrání osa tedy prochází těžištěm průřezu.

Rovnice neutrání osy je rovnice přímky, která se získá, když se dosadí za normálové napětí nula

$$\frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} = 0$$

Sklon osy (měřeno od osy y proti směru hodinových ručiček) se obdrží, pokud se dají do poměru souřadnice z a y .

$$\operatorname{tg} b = \frac{z}{y} = \frac{M_z I_y}{M_y I_z}$$

Největší napětí (v absolutní hodnotě) se nachází v nejvzdálenějším bodě průřezu od neutrání osy.

Hledání extrémů normálového napětí

V případě šikmého ohybu extrémní normálová napětí jsou v průřezu s maximálními momenty M_y a M_z .

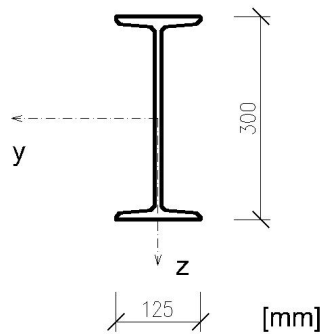
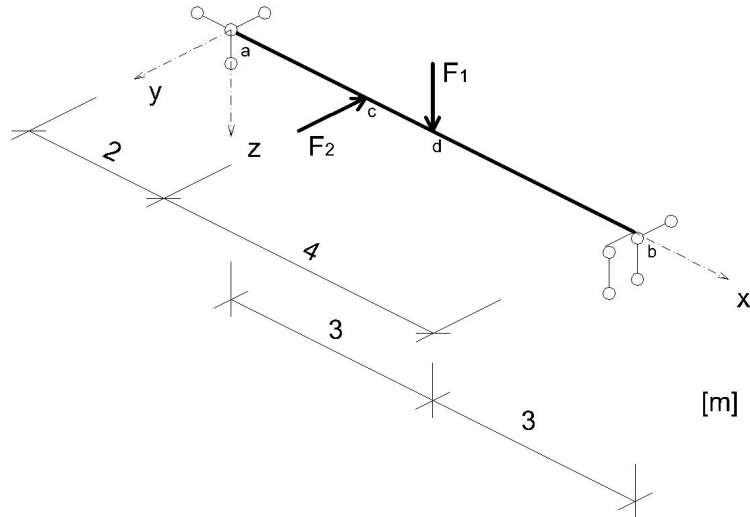
V případě průřezu, který není dvojose symetrický a hledá se extrém pro tah i tlak zvlášť, je třeba posoudit průřezy s největšími kladnými a zápornými momenty v obou rovinách xz a xy .

V případě prostorového ohybu je třeba posoudit v každém úseku, kde jsou křivky momentů hladké, průřezy s extrémními momenty M_y a M_z .

Zadání

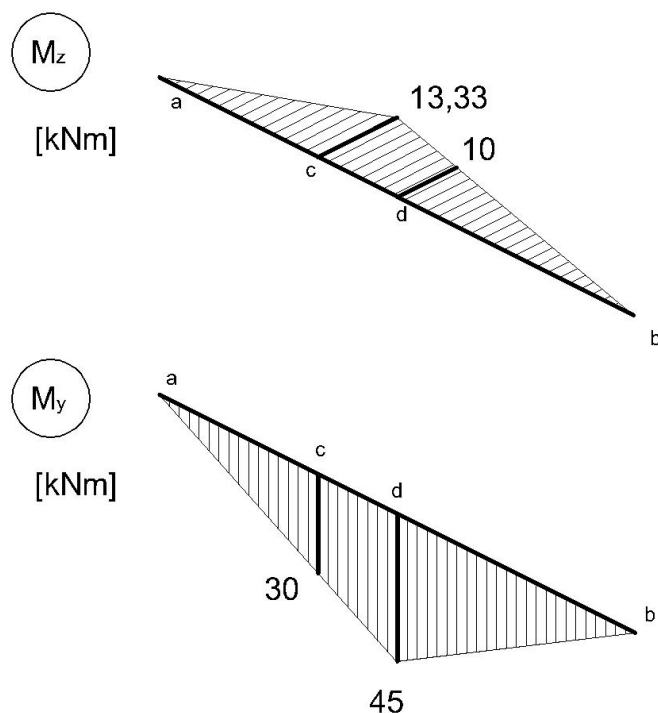
Statically určitě podepřený prostorově namáhaný nosník je zatížen ve svislé rovině xz silou $F_1 = 30\text{kN}$ a ve vodorovné rovině silou $F_2 = 10\text{ kN}$. Průřez nosníku je z ocelového válcovaného I-profilu č 300. Výška průřezu je $h = 300\text{ mm}$ a šířka $b = 125\text{mm}$, momenty setrvačnosti průřezu jsou $I_y = 97,9 \cdot 10^{-6}\text{ m}^4$ a $I_z = 4,49 \cdot 10^{-6}\text{ m}^4$.

Určete maximální (kladné) normálové natěť σ_x na nosníku, určete průřez a polohu bodu v průřezu, kde toto napětí nastane. V tomto průřezu zakreslete a zakótujte polohu neutrální osy.



Řešení

Osy y a z jsou osami symetrie průřezu a jsou tedy zároveň hlavními osami setrvačnosti. Určí se průběhy vnitřních ohybových momentů.



Obr.: Průběhy ohybových momentů

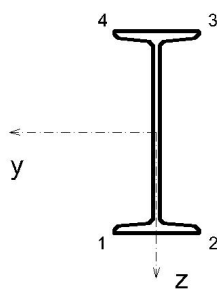
Vzhledem k tomu, že zatížení nepůsobí v jedné rovině, jedná se o prostorový ohyb. Extrémy je třeba hledat po úsecích, v nichž jsou momenty popsány hladkou křivkou.

úsek a-c \Rightarrow extrémy M_y a M_z jsou v bodě c

úsek c-d \Rightarrow extrém M_y je v bodě d a extrém M_z je v bodě c

úsek d-b \Rightarrow extrémy M_y a M_z jsou v bodě d

Z této analýzy plyne, že je třeba posoudit průřezy c a d



Neutrální osa prochází těžištěm, nejvzdálenější body jsou krajní body pásnic

$$s_{x,c1} = \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} = \frac{30 \cdot 10^3 (0,15)}{97,9 \cdot 10^{-6}} - \frac{13,33 \cdot 10^3 (0,0625)}{4,49 \cdot 10^{-6}} = -139,63 \cdot 10^6 \text{ Pa} = -139,63 \text{ MPa}$$

$$s_{x,c2} = \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} = \frac{30 \cdot 10^3 (0,15)}{97,9 \cdot 10^{-6}} - \frac{13,33 \cdot 10^3 (-0,0625)}{4,49 \cdot 10^{-6}} = 231,56 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 231,56 \text{ MPa}$$

$$s_{x,c3} = \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} = \frac{30 \cdot 10^3 (-0,15)}{97,9 \cdot 10^{-6}} - \frac{13,33 \cdot 10^3 (-0,0625)}{4,49 \cdot 10^{-6}} = 139,63 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 139,63 \text{ MPa}$$

$$S_{x,c4} = \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} = \frac{30 \cdot 10^3 (-0,15)}{97,9 \cdot 10^{-6}} - \frac{13,33 \cdot 10^3 (0,0625)}{4,49 \cdot 10^{-6}} = -231,56 \cdot 10^6 \text{ Pa} = -231,56 \cdot 10^6 \text{ MPa}$$

$$S_{x,d1} = \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} = \frac{45 \cdot 10^3 (0,15)}{97,9 \cdot 10^{-6}} - \frac{10 \cdot 10^3 (0,0625)}{4,49 \cdot 10^{-6}} = -70,25 \cdot 10^6 \text{ Pa} = \text{MPa}$$

$$S_{x,d2} = \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} = \frac{45 \cdot 10^3 (0,15)}{97,9 \cdot 10^{-6}} - \frac{10 \cdot 10^3 (-0,0625)}{4,49 \cdot 10^{-6}} = 208,15 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 208,15 \text{ MPa}$$

$$S_{x,d3} = \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} = \frac{45 \cdot 10^3 (-0,15)}{97,9 \cdot 10^{-6}} - \frac{10 \cdot 10^3 (-0,0625)}{4,49 \cdot 10^{-6}} = 70,25 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 70,25 \text{ MPa}$$

$$S_{x,d4} = \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} = \frac{45 \cdot 10^3 (-0,15)}{97,9 \cdot 10^{-6}} - \frac{10 \cdot 10^3 (0,0625)}{4,49 \cdot 10^{-6}} = -208,15 \cdot 10^6 \text{ Pa} = -208,15 \text{ MPa}$$

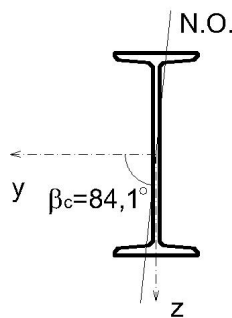
Největší normálová napětí jsou tedy v průřezu *c*. Největší tah je v bodě 2, největší tlak je v bodě 4.

POZN: Nejvíce namáhané body průřezů by bylo také možné určit analýzou znamének, aniž by se řešilo všech 8 variant.

V průřezu *c* se určí směr neutrální osy

$$\text{tg } b = \frac{z}{y} = \frac{M_z I_y}{M_y I_z} = \frac{13,33 \cdot 10^3 \cdot 97,9 \cdot 10^{-6}}{30 \cdot 10^3 \cdot 4,49 \cdot 10^{-6}} = 9,69$$

$$b = \arctg(9,69) = 84,1^\circ$$



Poloha neutrální osy v nejvíce namáhaném průřezu *c*.