

## Příklad 7 – Průhyb nosníku - složitější případ

### Teorie

Pokud nejsou zatížení nebo tuhost nosníku po celé délce nosníku popsány hladkou křivkou, je třeba nosník rozdělit na úseky, kde je toto splněno. V každém úseku se určí funkce ohybového momentu. Dvojnou integrací se získá rovnice pootočení a průhybu.

$$j(x) = \int \frac{-M(x)}{EI} dx$$

$$w(x) = \int j(x) dx$$

Při integraci v každém úseku vzniknou dvě integrační konstanty. K dispozici k jejich určení jsou kromě celkem dvou podmínek v podporách nosníku ještě dvě podmínky na každém rozhraní úseků. Tyto podmínky zajišťují spojitost pootočení a průhybu

$$j_{i(x=x_i)} = j_{i+1(x=x_i)}$$

$$w_{i(x=x_i)} = w_{i+1(x=x_i)},$$

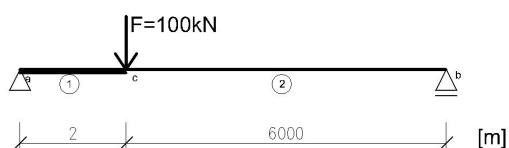
kde  $x_i$  je souřadnice konce  $i$ -tého úseku.

### Zadání

Nosník s proměnným průřezem je na obrázku. Průřezy 1 a 2 jsou obdélníkové, výška prvního průřezu je 1,3 násobkem výšky druhého průřezu.

a) Pomocí metody integrace ohybové čáry určete rovnici průhybu pro obě části nosníku.

b) Vyjádřete průhyb pod silou a uprostřed nosníku (v závislosti na tuhosti  $EI_1$ , resp.  $EI_2$ )



### Řešení

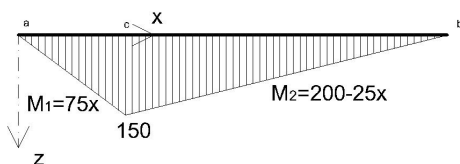
Nejdříve se určí poměr tuhostí v úsecích.

$$h_1 = 1,3h_2$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{12 \cdot b \cdot h_1^3}{12 \cdot b \cdot h_2^3} = \frac{h_1^3}{h_2^3} = \frac{(1,3 \cdot h_2)^3}{h_2^3} = 1,3^3 = 2,197$$

$$I_1 = 2,197 I_2$$

Další krok je provedení integrace ohybové čáry v úsecích. Pro vyjádření funkce ohybových momentů v obou úsecích je třeba použít stejný souřadný systém.



První úsek:  $x \in \langle 0, 2 \rangle$

$$M_1 = 75x \cdot 10^3$$

$$EI_1 \cdot 10^{-3} j_1 = -\frac{75}{2} x^2 + C_1$$

$$EI_1 \cdot 10^{-3} w_1 = -\frac{75}{6} x^3 + C_1 x + C_2$$

Druhý úsek:  $x \in \langle 2, 8 \rangle$

$$M_2 = (200 - 25x) \cdot 10^3$$

$$EI_2 \cdot 10^{-3} j_2 = \frac{25}{2} x^2 - 200x + C_3$$

$$EI_2 \cdot 10^{-3} w_2 = \frac{25}{6} x^3 - 100x^2 + C_3 x + C_4$$

Okrajové podmínky – podpory

Díky tomu, že podmínky jsou homogenní (předepsané průhyby jsou nulové) není třeba se zabývat tuhostmi, protože se násobí nulou.

Levá podpora:  $w_{1(x=0)} = 0$

$$0 = -\frac{75}{6} 0^3 + C_1 \cdot 0 + C_2$$

$$C_2 = 0$$

-----

Pravá podpora:  $w_{2(x=8)} = 0$

$$0 = \frac{25}{6} 8^3 - 100 \cdot 8^2 + C_3 \cdot 8 + C_4$$

$$8 \cdot C_3 + C_4 = 4266,667$$

-----

Okrajové podmínky - na rozhraní úseků

Zde je třeba brát v úvahu konkrétní tuhosti v jednotlivých úsecích. Obě rovnice se převedou na společnou tuhost (první nebo druhou) a potom se touto tuhostí celá rovnice pokráčí.

Pootočení na rozhraní úseků:  $j_{1(x=2)} = j_{2(x=2)}$

$$\frac{1}{2,197 EI_2} \left( -\frac{75}{2} 2^2 + C_1 \right) = \frac{1}{EI_2} \left( \frac{25}{2} 2^2 - 200 \cdot 2 + C_3 \right)$$

$$-\frac{75}{2} 2^2 + C_1 = \left( \frac{25}{2} 2^2 - 200 \cdot 2 + C_3 \right) 2,197$$

$$C_1 - 2,197 C_3 = -618,95$$

-----

Průhyb na rozhraní úseků:  $w_{1(x=2)} = w_{2(x=2)}$

$$\frac{1}{2,197 EI_2} \left( -\frac{75}{6} 2^3 + C_1 \cdot 2 + C_2 \right) = \frac{1}{EI_2} \left( \frac{25}{6} \cdot 2^3 - 100 \cdot 2^2 + C_3 \cdot 2 + C_4 \right)$$

$$-\frac{75}{6} 2^3 + C_1 \cdot 2 + C_2 = \left( \frac{25}{6} \cdot 2^3 - 100 \cdot 2^2 + C_3 \cdot 2 + C_4 \right) 2,197$$

$$2.C_1 - 4,394.C_3 - 2,197.C_4 = -705,5667$$

-----

Soustava rovnic:

$$8.C_3 + C_4 = 4266,667$$

$$C_1 - 2,197C_3 = -618,95$$

$$2.C_1 - 4,394.C_3 - 2,197.C_4 = -705,5667$$

Řešení soustavy rovnic:

$$C_1 = 619,325$$

$$C_3 = 563,621$$

$$C_4 = -242,30$$

Výsledné rovnice pootočení:

$$j_1 = \frac{10^{-3}}{EI_1} \left( -\frac{75}{2}x^2 + 619,325 \right) \quad \text{platí pro } x \in \langle 0,2 \rangle$$

$$j_2 = \frac{10^{-3}}{EI_2} \left( \frac{25}{2}x^2 - 200x + 563,621 \right) \quad \text{platí pro } x \in \langle 2,8 \rangle$$

Výsledné rovnice pootočení:

$$w_1 = \frac{10^{-3}}{EI_1} \left( -\frac{75}{6}x^3 + 619,325.x \right) \quad \text{platí pro } x \in \langle 0,2 \rangle$$

$$w_2 = \frac{10^{-3}}{EI_2} \left( \frac{25}{6}x^3 - 100x^2 + 563,621x - 242,30 \right) \quad \text{platí pro } x \in \langle 2,8 \rangle$$

Průhyb pod silou:

$$w_{1(x=2)} = \frac{10^{-3}}{EI_1} \left( -\frac{75}{6}2^3 + 619,325.2 \right) = \frac{1138,66.10^3}{EI_1} = \frac{1138,66.10^3}{2,197EI_2} = \frac{518,28.10^3}{EI_2}$$

nebo

$$w_{2(x=2)} = \frac{10^{-3}}{EI_2} \left( \frac{25}{6}2^3 - 100.2^2 + 563,621.2 - 242,30 \right) = \frac{518,28.10^3}{EI_2}$$

Průhyb uprostřed:

$$w_{2(x=4)} = \frac{10^{-3}}{EI_2} \left( \frac{25}{6}4^3 - 100.4^2 + 563,621.4 - 242,30 \right) = \frac{678,85.10^3}{EI_2}$$