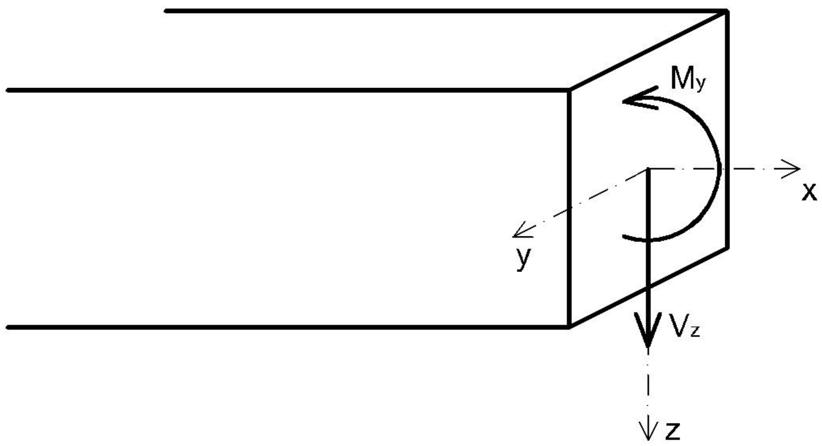
Příklad 4 – Ohýbaný nosník - napětí

Teorie

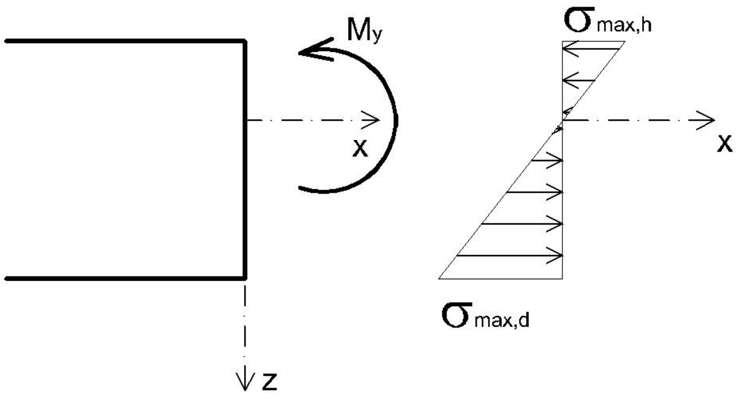
Prostý ohyb, rovinný ohyb

Při prostém ohybu je průřez namáhán ohybovým momentem otáčejícím kolem jedné z hlavních os setrvačnosti průřezu, obvykle osy *y*. Moment se značí M_y nebo jenom *M*. Běžněji je možné se setkat s ohybovým momentem v kombinaci s posouvající silou ve směru druhé z hlavních os setrvačnosti, označovanou V_z nebo jenom *V*. V tomto případě hovoříme o rovinném ohybu.



Normálové napětí

Ohybový moment způsobuje normálové deformace průřezu ε_x a normálové napětí σ_x. Na základě Bernoulli-Navierovy hypotézy o zachování rovinnosti průřezů po deformaci, se předpokládá lineární rozložení těchto veličin po výšce průřezu.



Průběh napětí po průřezu v závislosti na souřadnici *z* je dán rovnicí

$$s_x = \frac{M_y z}{I_y},$$

kde

I_y je moment setrvačnosti průřezu

z je z-ová souřadnice bodu v průřezu

M_y je ohybový moment

Extrémní normálová napětí

Souřadnice z je v čitateli vzorce pro normálové napětí, největší moment je pro největší hodnotu z, tedy v krajních vláknech. Moment setrvačnosti I_y je obvykle konstantní pro celý nosník, maximální souřadnice z je obvykle konstantní pro celý nosník. Moment M_y je proměnný po délce nosníku. Protože je v čitateli, extrém normálového napětí, bude v místě největšího ohybového momentu.

Pokud se nerozlišuje o jaký extrém se má jednat (tah, tlak) vznikne tento extrém ve vzdálenějších vláknech od těžiště a v místě největšího ohybového momentu v absolutní hodnotě.
Pokud se hledá například největší tahová napětí a průřez je nesymetrický, je třeba srovnat napětí v horních vláknech v místě největšího záporného momentu s napětím v dolních krajních vláknech v místě největšího kladného momentu. Obdobnou úvahu je třeba provést pro největší tlaková napětí.

Smyková napětí v masivním průřezu

U masivních průřezů se obvykle zabýváme jenom napětím ve směru posouvající síly, tedy napětím τ_{xz}. Ve směru kolmém předpokládáme konstantní rozdělení tohoto napětí.

Velikost smykového napětí se určí ze vztahu

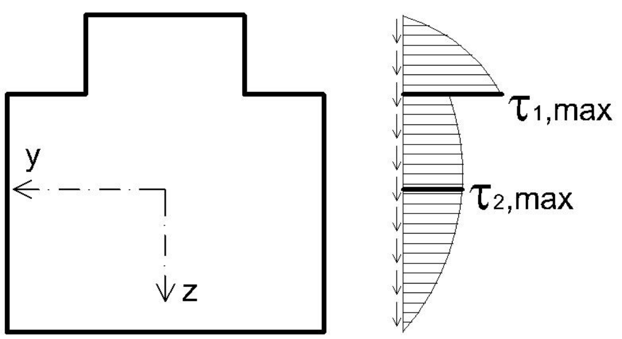
$$t_{xz} = \frac{V_z \overline{S}_y}{I_y b},$$

kde

V_z	je posouvající síla
$\overline{S}_y$	je statický moment plochy dolní části průřezu odříznuté myšleným řezem
I_y	je moment setrvačnosti průřezu
b	je šířka průřezu v místě v místě řezu

Průběhy smykových napětí po masivním průřezu

Moment setrvačnosti I_y konstantní pro každý řez na průřezu a obvykle i po délce nosníku. V_z je konstantní pro daný průřez a $\overline{S}_y$ a b se mění po výšce průřezu. Pro krajní vlákna je statický moment plochy $\overline{S}_y$ nulový a tedy i smyková napětí jsou v krajních vláknech nulová.
Pro obdélníkové části je šířka b konstantní. Statický moment odříznuté části je parabolou druhého stupně, neboť je součinem lineárně měnícího se plochy a lineárně měnícího se ramene po výšce. Z toho plyne, že i průběh smykových napětí bude po výšce částí průřezu parabolou.
Extrémní napětí nastává v místě maximálního statického momentu plochy $\overline{S}_y$, tedy v těžišti celého průřezu, popřípadě na rozhraní různých šířek průřezu (v užší části).



Smyková napětí v tenkostěnném průřezu

Pro tenkostěnné průřezy se uvažuje konstantní rozložení smykového napětí po tloušťce jednotlivých částí průřezu. Směr napětí odpovídá směru os jednotlivých částí

$$t = \frac{V_z \overline{S}_y}{I_y t},$$

kde

V_z je posouvající síla

$\overline{S}_y$ je statický moment plochy dolní části průřezu odříznuté myšleným řezem vedeným ve směru tloušťky dané části

I_y je moment setrvačnosti průřezu

t je tloušťka části v místě řezu

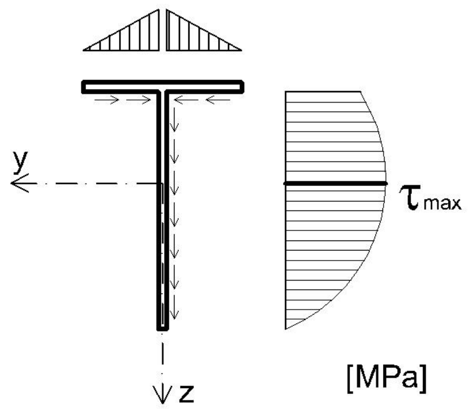
Průběhy smykových napětí po tenkostěnném průřezu

Moment setrvačnosti I_y konstantní pro každý řez na průřezu a obvykle i po délce nosníku. V_z je konstantní pro daný průřez. Tloušťka t je obvykle konstantní pro každou část průřezu. Statický moment odříznuté části $\overline{S}_y$ se mění se změnou polohy řezu. Pro krajní vlákna je statický moment plochy $\overline{S}_y$ nulový a tedy i smyková napětí jsou v krajních vláknech nulová.

Pro obdélníkové části je šířka t konstantní. Pro svislé obdélníkové části je statický moment odříznuté části parabolou druhého stupně, neboť je součinem lineárně měnícího se plochy a lineárně měnícího se ramene. Pro vodorovné obdélníkové části je statický moment odříznuté části lineární, neboť je součinem lineárně měnící se plochy a konstantního ramene.

Z toho plyne, že i průběh smykových napětí bude ve svislém směru parabolou a ve vodorovném směru lineární.

Extrémní napětí nastává v místě maximálního statického momentu plochy $\overline{S}_y$, tedy v těžišti celého průřezu, popřípadě na rozhraní různých tloušťek průřezu (v užší části).



Zadání

Nosník s převislým koncem je zatížen spojitým zatížení q = 4 kN/m a osamělou silou F = 40 kN. Průřez nosníku je ocelový svařovaný profil.

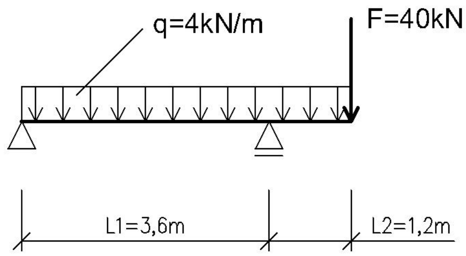
Rozměry nosníku jsou:

$L_1 = 3,6\ m$

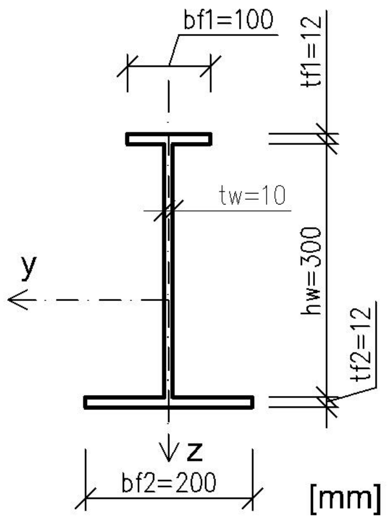
$L_2 = 1,2\ m$

Rozměry průřezu jsou:
šířka horní pásnice $b_{f1} = 100$ *mm*
šířka dolní pásnice $b_{f2} = 100$ *mm*
tloušťka pásnic $t_f = 12$ *mm*
výška stojiny $h_w = 300$ *mm*
tloušťka stojiny tw = 10 mm

1) Určete průřez, ve kterém vznikají extrémní normálová napětí σ_x.
2) V tomto kritickém průřezu (vpravo) průběh normálových napětí σ_x a smykových napětí τ po průřezu, včetně směru jejich toku.



Obr.: Výpočtový model nosníku



Obr.: Průřez nosníku

__Řešení:__
ad. 1)
Normálová napětí určíme ze vztahu pro rovinný ohyb

$$s_x = \frac{M_y z}{I_y},$$

Vzhledem k tomu, že není zadáno o jaký extrém se má jednat (tah, tlak) vznikne tento extrém ve vzdálenějších vláknech od těžiště – tedy v horních vláknech.

Je třeba nalézt místo extrému ohybového momentu.

a) Vyřeší se reakce nosníku

Pro potřeby řešení je možné nahradit spojitá zatížení v úsecích a-b a b-c náhradními břemeny Q_1 a Q_2.

$$Q_1 = qL_1 = 14{,}4kN$$

$$Q_2 = qL_2 = 4{,}8kN$$

Reakce R_a se vypočte z momentové podmínky k bodu *b*.

$$\Sigma M_{b,i} = 0$$

$$-R_a L_1 + Q_1 \frac{L_1}{2} - Q_2 \frac{L_2}{2} - FL_2 = 0$$

$$R_a = -6{,}93kN$$

Reakci R_b vypočteme ze silové podmínky do svislého směru

$$\Sigma F_{z,i} = 0$$

$$R_a + R_b - Q_1 - Q_2 - F = 0$$

$$R_b = 66{,}13kN$$

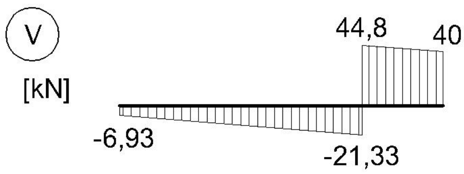
b) Vykreslí se průběhy posouvajících sil
Hodnoty posouvajících sil

$$V_a = R_a = -6{,}93kN$$

$$V_{b,L} = V_a - Q_1 = -21{,}33kN$$

$$V_{b,P} = V_{b,L} + R_b = 44{,}8N$$

$$V_c = V_{b,P} - Q_2 = 44{,}8N$$

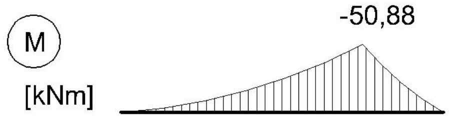


c) Vykreslí se průběhy momentů
V úsecích *a-b* a *b-c* nedosahuje posouvající síla nulové hodnoty -> nebudou zde lokální extrémy.
Extrém momentů bude v bodě *b*, kde posouvající síla mění znaménko.
Moment v bodě *b* je možné určit například z momentové podmínky rovnováhy k bodu *b* na vyjmuté pravé části nosníku.

$$\Sigma M_{b,i} = 0$$

$$-M_b - Q_2 \frac{L_2}{2} - FL_2 = 0$$

$$M_b = -50{,}88kNm$$



ad 2)

K výpočtu normálového i smykového napětí je třeba znát moment setrvačnosti průřezu k těžišti průřezu.

$$s_x = \frac{M_y z}{I_y}$$

$$t = \frac{V_z \overline{S}_y}{I_y t}$$

K tomu je třeba určit polohu těžiště průřezu.

a) Těžiště průřezu

$$h = 2t_f + h_w = 0{,}324m$$

$$A = (b_{f1} + b_{f2})t_f + h_w t_w = 0{,}0066m^2$$

$$S = b_{f1} t_f \frac{t_f}{2} + b_{f2} t_f \left(h - \frac{t_f}{2} \right) + h_w t_w \frac{h}{2} = 0{,}0012564m^3$$

$$z_t = \frac{S}{A} = 0{,}19036m$$

$$z_h = -z_t = -0{,}19036m$$

$$z_d = h - z_t = 0{,}13364m$$

b) Moment setrvačnosti

$$I_y = \frac{1}{12} b_{f1} t_f^3 + b_{f1} t_f \left(-z_h - \frac{t_f}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} t_w h_w^3 + b_w t_w \left(z_h + \frac{h}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} b_{f2} t_f^3 + b_{f2} t_f \left(z_d - \frac{t_f}{2} \right)^2 = 104{,}69.10^{-6} m^4$$

POZN: členy odpovídající momentům setrvačnosti pásnic k vlastnímu těžišti lze obvykle zanedbat.

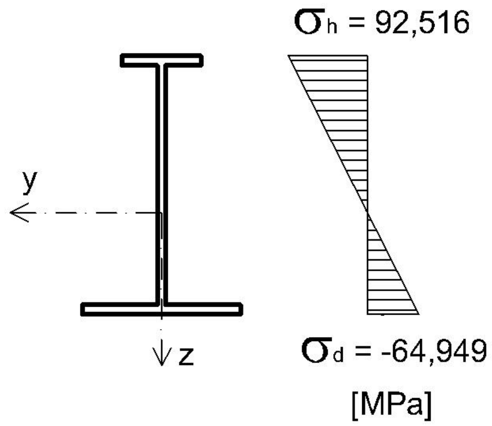
c) Normálová napětí

Normálová napětí jsou počítána pro extrémní moment, kterého je dosaženo v bodě *b*.

$$M_y = M_b = -50{,}88kNm$$

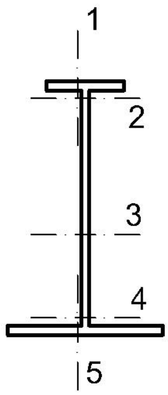
$$s_{x,h} = \frac{M_y z_h}{I_y} = \frac{-50{,}88.10^3.(-0{,}19036)}{104{,}69.10^{-3}} = 92516160Pa = 92{,}516MPa$$

$$s_{x,d} = \frac{M_y z_d}{I_y} = \frac{-50{,}88.10^3.0{,}13364}{104{,}69.10^{-3}} = -64949882Pa = -64{,}949Mpa$$



d) Statické momenty plochy

Statický moment plochy ve vzorci se uvažuje pro dolní část plochy oddělenou vyšetřovaným řezem k těžišti celého průřezu. Vzhledem k tomu, že statický moment horní části plochy oddělené myšleným řezem se liší pouze znaménkem, je možné využít pro výpočet i tuto část a výsledek dát do absolutní hodnoty.



$$\bar{S}_{y1} = t_f \frac{(b_{f1} - t_w)}{2}(-z_h - \frac{t_f}{2}) = 99{,}5544.10^{-6} m^3$$

$$\bar{S}_{y2} = t_f b_{f1}(-z_h - \frac{t_f}{2}) = 221{,}232.10^{-6} m^3$$

$$\bar{S}_{y3} = \bar{S}_{y2} + t_w(-z_h - t_f)\frac{(-z_h - t_f)}{2} = 380{,}293.10^{-6} m^3$$

$$\bar{S}_{y4} = t_f b_{f2}(z_d - \frac{t_f}{2}) = 306{,}336.10^{-6} m^3$$

$$\bar{S}_{y5} = t_f \frac{(b_{f2} - t_w)}{2}(-z_d - \frac{t_f}{2}) = 145{,}510.10^{-6} m^3$$

e) Smyková napětí

Smyková napětí jsou počítána v místě největšího normálového napětí (dle zadání) tedy v bodě b a to zprava. Posouvající síla zde je

$V_z = V_{b,P} = 44{,}8 N$.

$$t_1 = \frac{V_z \bar{S}_{y1}}{I_y t_f} = 3550193 Pa = 3{,}55 MPa$$

$$t_2 = \frac{V_z \bar{S}_{y2}}{I_y t_w} = 9467182 Pa = 9{,}47 MPa$$

$$t_3 = \frac{V_z \bar{S}_{y3}}{I_y t_w} = 16273881 Pa = 16{,}27 MPa$$

$$t_4 = \frac{V_z \bar{S}_{y4}}{I_y t_w} = 13109038 Pa = 13{,}11 MPa$$

$$t_5 = \frac{V_z \bar{S}_{y5}}{I_y t_f} = 5189008 Pa = 5{,}19 MPa$$

Vzhledem k tomu, že posouvající síla vpravo od podpory b je kladná, působí na levou část konstrukce směrem dolů. Stejný směr má smykový tok na stojině. Smykový tok na pásnicích navazuje na smykový tok na stojině. Tím je dán jeho směr – na horní pásnici se sbíhá směrem ke stojině a na dolní pásnici se rozchází směrem od stojiny.